Indécomposabilité de la loi de Poisson.

Leçon : 245, 261, 264, 243, 266, 241
↳ en faisant une partie sur les séries entières

Ref : Analyse C, Queffélec.

<u>Rappel</u> : $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, si Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Z = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

On va montrer une "réciproque".

Théorème

Soient X, Y deux va indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $Z := X+Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y suivent toutes les deux une loi de Poisson.

<u>Preuve</u>

On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$,
$$\begin{cases} f(z) := \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n \geq 0} p_n z^n \\ g(z) := \mathbb{E}[z^Y] = \sum_{n \geq 0} q_n z^n \end{cases}$$

avec $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, $q_n = \mathbb{P}(Y = n)$.

$Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $\mathbb{E}[z^Z] = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{\lambda(z-1)}$

Par l'indépendance de X et Y, il vient alors $\forall |z| \leq 1$

$$\begin{aligned} f(z) g(z) = \mathbb{E}[z^X]\mathbb{E}[z^Y] &\overset{\perp}{=} \mathbb{E}[z^X z^Y] \\ &= \mathbb{E}[z^{X+Y}] \quad \text{? } Z = X+Y \\ &= \mathbb{E}[z^Z] \\ &= e^{\lambda(z-1)}. \end{aligned}$$

On va maintenant développer en séries entières les deux membres de l'égalité, on va mq f et g sont des f° entières.

Pour $|z| \leq 1$, on a

$$\left(\sum_{n \geq 0} p_n z^n\right)\left(\sum_{n \geq 0} q_n z^n\right) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n.$$

ce qui nous donne : $p_0 q_0 = 1$, donc $p_0 \neq 0$ et $q_0 \neq 0$,

et pour $n \geq 1$, $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \dots + p_0 q_n \geq \max(p_n q_0, p_0 q_n)$

Il vient donc que $p_n \leq e^{-\lambda} q_0^{-1} \frac{\lambda^n}{n!}$, et les séries définissant f et g ont donc un rayon infini.

Par le principe du prolongement analytique, l'identité précédente, valable pour $|z| \leq 1$, se prolonge à $\mathbb{C}$:

$$\underline{\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) g(z) = e^{\lambda(z-1)}}.$$

f, g ne s'annulent pas, il existe $F, G \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq

$$\begin{cases} f = e^F \\ g = e^G \end{cases}$$

Pourquoi ?

Si f est non nulle, alors $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f'}{f}$ admet une primitive l.

On a $l' = f'/f \Rightarrow l' f - f' = 0 \Rightarrow (e^{-l} f)' = 0$

$\Rightarrow f = c e^l, \ c \in \mathbb{C}, c = e^\mu$

$\Rightarrow f = e^{l+\mu}$

~~On a alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(F(z) + G(z) - \lambda(z-1)) = 1$~~

~~$\Rightarrow z \mapsto F(z) + G(z) - \lambda(z-1)$ est à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$.~~

Identifions f et g. Si $|z| = r \geq 1$, alors $|f(z)| \leq f(|z|) = f(r)$, avec
$$g_0 f(r) \leq f(r) g(r) = e^{\lambda(r-1)}$$, de sorte que
$$|f(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)}, \quad |g(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)}, \text{ où } C > 0.$$

Donc
$$\begin{cases} e^{\mathrm{Re} F(z)} = |f(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)} \\ e^{\mathrm{Re} G(z)} = |g(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, F(z) \leq \ln C + \lambda(|z|-1) \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

On utilise le lemme suivant:

Lemme

Soit $f = u + iv$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Alors,
si $A(r) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$, on a

1) $|a_n| \leq 2 \dfrac{A(r) - u(0)}{r^n}$, $\forall n \geq 1$, $\forall r > 0$

2) Si $d \geq 0$ et si $A(r) \underset{r \to \infty}{=} O(r^d)$, alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$

Preuve Pour $r > 0$, la série $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ CVN vers $f(re^{i\theta})$.

Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{cases} a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\ 0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \end{cases}$$

On fait $L_1 + \overline{L_2}$:
$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \overset{\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 0}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - A(r)) e^{-in\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow |a_n r^n| = |a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(r) - u(re^{i\theta})) d\theta$$

On $a_0 r^0 = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta = f(0)$ (L, pour $n=0$)

$\Rightarrow u(0) = \mathrm{Re}\, f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta.$

Donc $|a_n| r^n \leq 2\,(A(r) - u(0))$

$$\Rightarrow \boxed{|a_n| \leq 2\,\frac{A(r)-u(0)}{r^n}}$$

2) en découle

$\square$

Revenons au théorème.

On a donc $\begin{cases} F(z) = \alpha z + a \\ G(z) = \beta z + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z) = e^{\alpha z + a} \\ g(z) = e^{\beta z + b} \end{cases}$

On a $f(1) = 1 = e^{\alpha} e^{a} \Rightarrow f(z) = e^{\alpha(z-1)}$

ainsi $f'(z) = \alpha e^{\alpha(z-1)} \Rightarrow f'(1) = \alpha.$

On a aussi $f'(1) = \sum_{n\geq 0} n p_n = \mathbb{E}[X] \geq 0$. (la série dérivée CV jusqu'au bord)

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$, et de même $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\beta)$.

$\square$